

**ELEMENTY TEORII RANDOMIZACJI**  
**II. MODELOWANIE DOŚWIADCZEŃ PROSTYCH**

**KADOSŁAW KALA**

**Katedra Metod Matematycznych i Statystycznych**  
**Akademii Rolniczej w Poznaniu**

**Streszczenie**

W pracy, będącej drugą w serii prac poświęconych teorii randomizacji, przedstawiono konstrukcję modeli dla prostych eksperymentów. Ponadto przedyskutowano powszechnie przyjmowane założenie o addytywności jednostek i obiektów w świetle słabszego założenia o zachowaniu jednorodności (symetrii) jednostek.

Wyprowadzone modele przeanalizowano ze względu na istnienie najlepszego liniowego nieobciążonego estymatora parametrów stałych. W tym celu wykorzystano ogólną teorię estymacji w modelach liniowych.

**1. WSTĘP**

Prezentowana praca jest drugą z cyklu trzech prac poświęconych teorii randomizacji. Cykl ten inicjuje praca Kali (1989), do której będziemy się odwoływać bezpośrednio pisząc I.

W obecnej pracy omówiono konstrukcję modeli dostosowanych do doświadczeń uwzględniających obecność wielu obiektów. W procesie modelowania zwrócono uwagę na sposób reprezentowania obiektów, a w szczególności omówiono zasadę addytywności w kontekście słabszego wymagania zachowania jednorodności (symetrii) jednostek eksperymentalnych.

Wyprowadzone tu modele rozpatrzono również pod kątem możliwości uzyskania najlepszych liniowych nieobciążonych estymatorów liniowych funkcji parametrów stałych. Skorzystano przy tym z teorii estymacji w ogólnych modelach liniowych. Niezbędne wyniki szczegółowe tej teorii zamieszczono w suplemencie.

---

**Słowa kluczowe:** addytywność, jednorodność, doświadczenia ślepe, modele stałe, modele losowe, modele mieszane

## 2. CECHA BADANA. BŁĄD TECHNICZNY

Biorąc pod uwagę zespół cech naturalnie charakteryzujących jednostki eksperymentalne, co do których wystarczy, że jesteśmy jedynie świadomi ich istnienia, wprowadzimy teraz cechę badaną jako tę cechę, na której koncentruje się zainteresowanie eksperymentatora i która będzie w doświadczeniu podlegała pomiarowi. Jest rzeczą naturalną, aby cechę badaną utożsamiać z pewną funkcją  $f$  cech wyróżnionych na jednostkach eksperymentalnych. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do funkcji najprostszyc, jakimi są funkcje liniowe, przy czym ograniczenie to, z uwagi na dużą dowolność w rozumieniu zespołu cech wyróżnionych, nie jest istotne. W rezultacie cechę badaną zapiszemy w postaci

$$f(x) = x'a, \quad (2.1)$$

gdzie  $x$  jest wektorem cech wyróżnionych, a  $a \in R^q$  jest ustalonym wektorem stałych współczynników definiujących funkcję  $f$ . W ten sposób, cechą badaną może być dowolna z  $q$  cech charakteryzujących jednostki, albo dowolna ich kombinacja liniowa.

Gdyby zainteresowanie eksperymentatora skupione było na kilku cechach, to zamiast wektora  $a$  należałoby wprowadzić układ wektorów określających jakie z cech wyróżnionych bądź jakie ich kombinacje liniowe stanowią zespół cech badanych. W konsekwencji rozważane zagadnienie miałoby charakter wielowymiarowy. Mimo takiej możliwości, w dalszym ciągu ograniczymy się do jednej cechy badanej.

W związku z wykonywaniem pomiaru cechy badanej wyrażenie (2.1) winno być jeszcze uzupełnione tzw. błędem technicznym, który do modeli opisujących eksperymenty rolnicze został wprowadzony przez Neymana i in. (1935). Błąd ten oznaczmy przez  $e$  i założymy o nim, że jest zmienną losową opisującą różnicę pomiędzy odnotowaną obserwacją (wartością pomiaru), a prawdziwą (teoretyczną) wartością cechy. Własności zmiennej losowej  $e$  odzwierciedlają warunki pomiaru. Mianowicie, założenie o braku błędów systematycznych implikuje uznanie wartości oczekiwanej zmiennej  $e$  za równą zero, założenie o niezależności pomiarów badanej cechy na poszczególnych jednostkach eksperymentalnych implikuje uznanie wszystkich kowariancji pomiędzy odpowiednimi błędami losowymi za równe zero i wreszcie założenie o wykonywaniu pomiaru badanej cechy tą samą metodą i w tych samych warunkach na wszystkich jednostkach eksperymentalnych uzasadnia przyjęcie tej samej wielkości wariancji dla wszystkich jednostek biorących udział w doświadczeniu. Tę wspólną wariancję błędu technicznego oznaczmy symbolem  $\sigma^2$ . Ponadto przyjmiemy naturalne założenie o niezależności błędu technicznego od zmiennych losowych opisujących zachowanie się wyróżnionych cech na jednostkach eksperymentalnych stanowiących próbę  $\mathcal{P}_n$ .

W rezultacie potencjalną, obserwującą cechy badanej, można zapisać w postaci zmiennej losowej

$$y = x'a + e \quad (2.2)$$

o własnościach probabilistycznych wynikających z przyjętych założeń.

Jeśli teraz uwzględnimy komplet jednostek stanowiących próbę prostą  $\mathcal{P}_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  z populacji nieskończonej  $\mathcal{P}_\infty$ , to potencjalne obserwacje utworzą wektor losowy w postaci

$$y = Xa + e, \quad (2.3)$$

gdzie  $X$  jest macierzą losową określoną wzorem (I.6.1).

W przypadku próby zrandomizowanej  $\mathcal{P}_n = \{u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}\}$  pochodzącej z populacji skończonej  $\mathcal{P}_N$  wektor potencjalnych obserwacji przyjmie postać

$$y = X_{(c)}a + e, \quad (2.4)$$

gdzie  $X_{(c)}$  jest macierzą określoną wzorem (I.6.5).

Ponieważ na mocy poczynionych założeń o składowych wektora błędów możemy napisać, że

$$E(e) = 0 \quad \text{oraz} \quad D(e) = \sigma_e^2 I_n, \quad (2.5)$$

a także przyjąć niezależność wektora  $e$  od macierzy losowej  $X$  lub macierzy losowej  $X_{(c)}$ , których modele określono w (I.6.4) i (I.6.8), więc wektorowi  $y$  odpowiada model

$$\{y, 1_n \mu' a, (a' \Sigma a + \sigma_e^2) I_n\}, \quad (2.6)$$

gdy próba  $\mathcal{P}_n$  jest prosta, lub model

$$\{y, 1_n \bar{x}' a, \frac{N}{N-1} a' S a (I_n - \frac{1}{N} J_n) + \sigma_e^2 I_n\}, \quad (2.7)$$

gdy próba  $\mathcal{P}_n$  jest zrandomizowana.

W dalszym ciągu wygodnie będzie posługiwać się następującymi oznaczeniami:

$$m_u = \begin{cases} \mu' a, & \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_\infty \\ \bar{x}' a, & \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_N \end{cases}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_u^2 = \begin{cases} a' \Sigma a, & \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_\infty \\ \frac{N}{N-1} a' S a, & \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_N \end{cases} \quad (2.9)$$

Parametr  $m_u$  określa w istocie wartość oczekiwaną potencjalnej obserwacji cechy badanej  $y$ , to znaczy

$$E(y) = m_u,$$

natomiast parametr  $\sigma_u^2$  jest składnikiem (komponentem) wariancji cechy badanej  $y$ , określającym wielkość rozproszenia jednostek populacji podstawowej widzianych poprzez tę cechę. Całkowita wariancja potencjalnej obserwacji cechy badanej ma więc postać

$$D(y) = \sigma_u^2 + \sigma_e^2$$

i jest sumą wariancji  $\sigma_u^2$  i wariancji błędu technicznego  $\sigma_e^2$ .

Warto jeszcze odnotować, że obydwa wprowadzone tu parametry,  $m_u$  oraz  $\sigma_u^2$ , są uzależnione od jednostek eksperymentalnych całej populacji podstawowej za pośrednictwem tylko tych cech wyróżnionych na jednostkach, którym w wektorze  $\mathbf{a}$  odpowiadają składowe niezerowe. Wreszcie należy zauważyć, że przedstawione tu modele (2.6) i (2.7) mimo wprowadzenia błędu technicznego, nadal posiadają własność symetrii (jednorodności), która w modelach jednowymiarowych wyraża się równością składowych wektora wartości oczekiwanych, równością wszystkich wariancji oraz równością wszystkich kowariancji (porównaj twierdzenie I.1).

### 3. DOŚWIADCZENIA ŚLEPE

W modelach wyprowadzonych do tej pory nie uwzględniono obecności obiektów. Zanim to uczynimy rozważymy tutaj tzw. doświadczenia ślepe, lub, jak nazywa je Nelder (1965a, s.147), doświadczenia zerowe, które charakteryzują się tym, że wszystkie jednostki biorące udział w takim doświadczeniu są potraktowane tym samym obiektem. Mimo pozornej nieprzydatności takich doświadczeń mają one zastosowanie praktyczne, gdyż pozwalają wnioskować o stopniu niejednorodności jednostek doświadczalnych. Z punktu widzenia konstrukcji modeli eksperymentów omówienie tych doświadczeń jest przydatne, gdyż umożliwia klarowne wprowadzenie dodatkowych pojęć i założeń, a także pozwala bardziej uniwersalnie spojrzeć na modele już wyprowadzone.

Na początek zauważmy, że gdyby jednostki użyte w doświadczeniu były początkowo wszystkie identyczne, a następnie potraktowano by je tym samym obiektem, powiedzmy  $t_0$ , to w rezultacie można byłoby oczekiwać jednakowych zmian wartości cech opisujących te jednostki, które tym samym zachowałyby walor identyczności. Własność tę można wyrazić jako zachowanie jednorodności (wymienialności) jednostek ze względu na użyty obiekt  $t_0$ .

Przechodząc do doświadczeń z jednostkami naturalnie zróżnicowanymi, stanowiącymi próbę prostą lub zrandomizowaną, pożądanym byłoby, aby spełniona była analogiczna własność. Odpowiada ona tzw. addytywności efektów jednostek i obiektów, która w procesie modelowania eksperymentów jest powszechnie wykorzystywana, choć wprowadzana bardzo niejednolicie (patrz Kempthorne, 1952, s.137, Nelder, 1965b, s.168, White, 1975, s.562, Bailey, 1981, s.215, Pearce, 1983, s.58).

Formalizując powyższe uwagi przyjmijmy, że wektor  $x_0$  opisuje wartości cech wyróżnionych na jednostkach eksperymentalnych potraktowanych obiektem  $t_0$ . Wtedy różnica  $x_0 - x$  określa zmiany jakie w wektorze  $x$ , charakteryzującym początkowe wartości cech wyróżnionych, powoduje zastosowanie tego obiektu. W rezultacie potencjalna obserwacja cechy badanej uwzględniająca działanie obiektu  $t_0$  oraz obecność błędu

technicznego przyjmuje postać

$$y(0) = x'_0 a + e = y + (x_0 - x)' a,$$

gdzie wielkość  $(x_0 - x)' a$  stanowi łączny efekt obiektu  $t_0$  wyrażony poprzez cechę badaną, a  $y$  jest potencjalną obserwacją cechy badanej określoną wzorem (2.2), to jest przed zastosowaniem obiektu  $t_0$ . Jeśli teraz uwzględnimy wszystkie jednostki eksperymentalne stanowiące próbę  $\mathcal{P}_n$ , to potencjalne obserwacje uzyskane w doświadczeniu, w którym komplet jednostek potraktowano tym samym obiektem, utworzą wektor

$$y(0) = y + t^0, \quad (3.1)$$

gdzie  $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0)'$  jest wektorem efektów wywołanych działaniem rozpatrywanego obiektu na poszczególnych (kolejnych) jednostkach próby prostej lub zrandomizowanej, a  $y$  jest wektorem losowym określonym odpowiednio w (2.3) lub (2.4). Wektor  $t^0$  może reprezentować efekty stałe lub ogólniej efekty losowe. Ta druga sytuacja może mieć miejsce na przykład wtedy, gdy zachodzi uzasadnione podejrzenie o niemożliwość dokładnego powtórzenia obiektu  $t_0$  na kolejnych jednostkach biorących udział w doświadczeniu, lub wtedy, gdy obiekt  $t_0$  jest wybrany ze zbioru obiektów  $\mathcal{T}$  losowo (porównaj Scheffé, 1956, s.254). W tym wypadku przyjmiemy, że wektor efektów  $t^0$  jest nieskorelowany z wektorem  $y$ .

Teraz możemy zinterpretować założenie o zachowaniu jednorodności próby  $\mathcal{P}_n$  ze względu na zastosowany ten sam obiekt  $t_0$ . Otóż, biorąc pod uwagę modele (2.6) lub (2.7), twierdzenie I.1 oraz związek (3.1), łatwo zauważyć, że dla zachowania symetrii zmiennej losowej  $y(0)$  wektor  $t^0$  musi mieć równe składowe, jeśli efekty są stałe, lub musi mieć równe składowe w wektorze wartości oczekiwanych  $E(t^0)$ , jeśli efekty są losowe. W tym drugim wypadku dodatkowo wariancje wszystkich składowych wektora  $t^0$  muszą być równe i podobnie muszą być równe wszystkie kowariancje pomiędzy tymi składowymi.

W sytuacji, gdy wektor  $t^0$  zawiera efekty stałe, powyższe wymaganie oznacza, że wektor ten jest proporcjonalny do wektora  $\mathbf{1}_n$  z pewnym współczynnikiem proporcjonalności, powiedzmy  $t_0$ , wyrażającym jednakowy efekt obiektu  $t_0$  na wszystkich jednostkach próby. W dalszym ciągu współczynnik ten utożsamimy z samym obiektem i w związku z tym napiszemy równość

$$t^0 = t_0 \mathbf{1}_n.$$

Uwzględniając tę relację w równości (3.1) oraz korzystając z wprowadzonych już modeli dla wektora  $y$  możemy napisać modele potencjalnych obserwacji otrzymanych w doświadczeniu ślepych. Mają one postać

$$\{y(0), (m_n + t_0)\mathbf{1}_n, (\sigma_u^2 + \sigma_e^2)\mathbf{I}_n\}, \quad \text{gdy } \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_\infty, \quad (3.2)$$

oraz

$$\{y(0), (m_n + t_0)1_n, \sigma_u^2(I_n - \frac{1}{N}J_n) + \sigma_e^2I_n\}, \text{ gdy } P_n \subset P_N, \quad (3.3)$$

i różnią się od odpowiednich modeli (2.6) i (2.7) jedynie określeniem nieznanych parametrów.

Podobny wniosek można wyprowadzić w wypadku, gdy obiekt  $t_0$  powoduje efekty losowe. Wtedy zasada zachowania symetrii wymaga, aby

$$E(t^0) = r1_n$$

oraz

$$D(t^0) = \gamma J_n + \delta I_n,$$

gdzie  $\tau$  jest jednakowym dla wszystkich jednostek efektem oczekiwanym obiektu  $t_0$ ,  $\delta + \gamma$  jest jednakową wariancją efektów losowych, a  $\gamma$  jest ich jednakową kowariancją. Wobec przyjętej niezależności wektorów  $t^0$  i  $y$ , modyfikacje modeli (2.6) i (2.7) przyjmą teraz odpowiednio postacie

$$\{y(0), (m_n + \tau)1_n, \gamma J_n + (\sigma_u^2 + \sigma_e^2 + \delta)I_n\}, \quad P_n \subset P_\infty, \quad (3.4)$$

$$\{y(0), (m_u + \tau)1_n, \gamma J_n + \sigma_u^2(I_n - \frac{1}{N}J_n) + (\sigma_e^2 + \delta)I_n\}, \quad P_n \subset P_N. \quad (3.5)$$

W podsumowaniu można stwierdzić, że przy spełnieniu zasady zachowania jednorodności (symetrii) użyty obiekt może modyfikować wartość oczekiwaną potencjalnych obserwacji, lecz dla każdej jednostki, na której jest zastosowany, w jednakowym stopniu oraz może wprowadzać nowe lub zmieniać istniejące parametry w macierzy dyspersji, jednakże dla każdej jednostki w ten sam sposób. W dalszym ciągu wymagać będziemy, aby opisana zasada zachowania jednorodności (symetrii) była spełniona dla każdego obiektu biorącego udział w doświadczeniu.

W sytuacji, gdy wektor  $t_0$  zawiera efekty stałe, powyższe wymaganie jest zgodne z założeniem addytywności jednostek i obiektów w sformułowaniu Nelder'a (1965b, s.168), które orzeka, że jeżeli którykolwiek z obiektów byłby zastosowany na wszystkich jednostkach eksperymentalnych, to odchylenia obserwacji od ich średniej winny być niezależne od tego, który z obiektów został zastosowany. Wymaganie to jest także zgodne z założeniem o jednorodności wyrażonym przez White'a (1975, s.562), które stwierdza, że wariancje i kowariancje w modelu nie mogą zmieniać się wraz ze zmianą obiektu.

Na koniec zauważmy, że modele (3.2) i (3.3) różnią się od odpowiednich modeli (2.6) i (2.7) jedynie formalnie, określeniem nieznanego parametru w wartości oczekiwanej. To samo spostrzeżenie z dokładnością do parametru  $\gamma$ , dotyczy także modeli (3.4) oraz (3.5). Oznacza to, że z punktu widzenia konstrukcji modeli opisujących próbę prostą lub zrandomizowaną, odniesionych do cechy badanej, nie jest istotne czy w czasie tworzenia tej próby, wszystkie jednostki były potraktowane jakimś jednym wspólnym obiektem, czy też wszystkie były od niego wolne. Modele pozostaną takie same. Spostrzeżenie to wyjaśnia kontrowersję jaka

mogłaby powstać, gdyby cerna badana nie była możliwa do rozsądnego określenia bez udziału jakiegoś obiektu. Ma to na przykład miejsce w doświadczeniach, w których obiektami są odmiany roślin i w związku z tym trudno mówić o cesze badanej bez założenia, że rośliny którejkolwiek odmiany są obecne na poletkach doświadczalnych.

#### 4. MODELE STAŁE I MIESZANE

W tym paragrafie rozważymy doświadczenia z ustalonym zbiorem obiektów, których efekty są stałe. Na początek zajmiemy się konstrukcją modelu. Ogólnie rzecz ujmując konstrukcja taka obejmuje dwa etapy. Pierwszy z nich zostaje osiągnięty z chwilą pobrania próby  $P_n$ . W zależności od rodzaju populacji podstawowej pobrana próba jest albo próbą prostą albo próbą zrandomizowaną, a jej model, odniesiony do wybranej cechy badanej, określony jest w (2.6) lub odpowiednio w (2.7). W etapie tym zwrócić należy jeszcze uwagę na konieczność zagwarantowania dostatecznej liczby replikacji dla poszczególnych obiektów zgodnie z przyjętym planem doświadczenia. Jeśli zatem plan doświadczenia przewiduje, że w eksperymencie poddanych będzie badaniu w ustalonych obiektów oraz że obiekt  $s$ -ty ma być zastosowany na  $n_s$  jednostkach, to w rezultacie próba  $P_n$  musi zawierać  $n = \sum_{s=1}^v n_s$  jednostek eksperymentalnych.

Drugi etap związany jest z zastosowaniem obiektów na jednostkach próby  $P_n$ . Podstawowym problemem, poza problemem technicznym związanym z koniecznością utrzymania tych samych warunków na wszystkich jednostkach, jest ustalenie zasady przyporządkowania obiektów do poszczególnych jednostek. Otóż dysponując próbą  $P_n$  prostą lub zrandomizowaną, a więc mając zagwarantowaną modelową identyczność jednostek, przyporządkowanie takie może przebiegać w sposób systematyczny i najprostrzy, to jest obiekt pierwszy może być zastosowany na  $n_1$  pierwszych jednostkach, obiekt drugi na  $n_2$  kolejnych jednostkach itd. (rozumianych tak jak w paragrafie I.6).

Przechodząc do modyfikacji modelu próby, wynikających z wprowadzenia do doświadczenia obiektów, posłużymy się zasadą zachowania jednorodności, która, jak już zostało to powiedziane, w wypadku obiektów wywołujących efekty stałe odpowiada założeniu addytywności obiektów i jednostek doświadczalnych. W rezultacie, w każdej grupie jednostek "potraktowanych" tym samym obiektem, potencjalne obserwacje można wyrazić za pomocą zmiennych losowych o identycznych rozkładach, przy czym w każdej grupie związanej z działaniem określonego obiektu, tak jak w przypadku doświadczenia ślepego, pojawi się efekt stały reprezentujący ten obiekt. Fakt ten możemy wyrazić pisząc równość

$$y_j(s) = y_j + t_s, \quad (4.1)$$

gdzie  $y_j$  reprezentuje wartość cechy badanej na  $j$ -tej jednostce eksperymentalnej bez uwzględnienia obiektu  $s$  (na przykład taką jaką byłaby

uzyskana na tej jednostce w doświadczeniu zerowym), natomiast  $t_s$  jest efektem obiektu  $s$  jednakowym dla tych wszystkich jednostek, na których obiekt ten zastosowano. Korzystając teraz z modelu potencjalnych wartości cechy badanej dla jednostek stanowiących próbę prostą lub odpowiednio próbę zrandomizowaną w doświadczeniu ślepy, można zapisać dwa modele uwzględniające badane w doświadczeniu obiekty. Mają one postać

$$\{y, m_u \mathbf{1}_n + \Delta' t, (\sigma_u^2 + \sigma_o^2) \mathbf{I}_n\}, \quad \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_\infty, \quad (4.2)$$

oraz

$$\{y, m_u \mathbf{1}_n + \Delta' t, \sigma_u^2 (\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n) + \sigma_o^2 \mathbf{I}_n\}, \quad \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_1, \quad (4.3)$$

gdzie

$$y = (y_1(1), y_2(1), \dots, y_{n_1}(1), y_{n_1+1}(2), \dots, y_k(v))', \quad (4.4)$$

jest wektorem obserwowanych zmiennych losowych,

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_v)', \quad (4.5)$$

jest wektorem nieznanych efektów obiektowych, a

$$\Delta' = \text{diag}_{i=1}^v (\mathbf{1}_{n_i}) \quad (4.6)$$

jest macierzą planu doświadczenia określającą rozmieszczenie obiektów na jednostkach eksperymentalnych.

Łatwo zauważyć, że wyprowadzone tu modele charakteryzują się taką samą strukturą wartości oczekiwanej, z dokładnością do interpretacji parametru  $m_u$ , zdefiniowanego w (2.8), oraz różnią się istotnie strukturą macierzy dyspersji, która w modelu (4.2) jest prosta - oparta o macierz jednostkową  $\mathbf{I}_n$  i jeden komponent wariancji

$$\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_o^2, \quad (4.7)$$

a w modelu (4.3) jest złożona - oparta o macierz jednostkową  $\mathbf{I}_n$  z komponentem  $\sigma^2$  i o macierz  $\mathbf{J}_n$  z mnożnikiem

$$\gamma_o = -\sigma_u^2/N \quad (4.8)$$

reprezentującym stałą kowariancję pomiędzy jednostkami próby.

Model (4.2), charakteryzujący się obecnością pojedynczego komponentu wariancji  $\sigma^2$ , zaliczany jest do klasy modeli stałych (porównaj Scheffé, 1956, s.252). Odpowiada on tutaj tzw. klasyfikacji jednokierunkowej, która związana jest z faktem grupowania jednostek eksperymentalnych według jednego kryterium, wyznaczonego przez układ  $v$  obiektów. Analiza wyników obserwacji podlegających temu modelowi jest oparta o dobrze znaną metodę najmniejszych kwadratów (Scheffé, 1959, s.9, Searle, 1971, s.229).

Model (4.3), o nieco rozbudowanej macierzy dyspersji, należy do klasy modeli mieszanych (porównaj Scheffé, 1956, s.257). Z punktu widzenia



estymacji wartości oczekiwanej wektora  $y$ , a w konsekwencji z punktu widzenia estymacji dowolnych estymowalnych funkcji parametrów  $t_1, t_2, \dots, t_v$ , a w szczególności ich porównań, model (4.3) również nie stwarza trudności. Zachodzi bowiem następujące

**Twierdzenie 1.** W modelu (4.3) najlepszym liniowym estymatorem nieobciążonym wartości oczekiwanej wektora losowego  $y$  jest estymator uzyskany metodą najmniejszych kwadratów.

**Dowód.** Korzystając z zamieszczonego w suplemencie lematu B oraz faktu, że  $\mathbf{1}_n \in R(\Delta')$ , gdzie  $R(\Delta')$  oznacza podprzestrzeń rozpiętą na kolumnach macierzy  $\Delta'$ , wystarczy pokazać, że spełniona jest relacja

$$R\left\{\left(\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n\right) \Delta'\right\} \subset R(\Delta')$$

Jej prawdziwość łatwo sprawdzić, ponieważ  $\mathbf{J}_n = \mathbf{1}_n \mathbf{1}'_n$ .  $\square$

Twierdzenie to praktycznie oznacza, że mimo dopuszczonego w modelu (4.3) skorelowania obserwowanych zmiennych losowych estymacja nieobciążona nieznanymi parametrami stałymi, a dokładniej ich estymowalnych funkcji liniowych, przebiega tak samo jak w modelu (4.2), to jest poprzez wyznaczenie średnich arytmetycznych dla poszczególnych obiektów.

## 5. LOSOWA REPREZENTACJA OBIEKTÓW.

Modele opisane w paragrafie poprzednim mają zastosowanie przy opisie doświadczeń, w których zainteresowanie eksperymentatora jest skoncentrowane na ustalonym skończonym zbiorze obiektów  $\mathcal{J}_v$ , przy dodatkowym założeniu, że obiekty wywołują efekty stałe. W sytuacji, gdy zbiór  $\mathcal{J}_v$  jest skończony, ale tak liczny, że użycie wszystkich obiektów w eksperymencie staje się uciążliwe, zachodzi potrzeba wyboru reprezentatywnego podzbioru. Pomocnym narzędziem okazuje się tu znowu proces randomizacji, który tym razem odnosi się do losowej permutacji obiektów, co powoduje że całe postępowanie można określić mianem randomizacji obiektów. W jego wyniku numery obiektów stają się zmiennymi losowymi i jako takie będą traktowane efekty tych obiektów. Zanim jednak skonstruujemy modele odpowiadające takim doświadczeniom zajmijmy się określeniem parametrów losowych efektów obiektowych.

Jeśli zatem zbiór  $\mathcal{J}$  liczy  $V$  obiektów, co odnotujemy pisząc  $\mathcal{J}_V$ , i są one uporządkowane w pewien początkowy sposób, to wprowadzając, podobnie jak w paragrafie I.5, zmienne losowe  $\delta_{rs}$ , efekt  $s$ -tego zrandomizowanego obiektu będzie wyrażony zmienną losową

$$t_{(s)} = \sum_{r=1}^V \delta_{rs} t_r \quad (5.1)$$

o wartości oczekiwanej

$$E(t_{(s)}) = \bar{t} = \frac{1}{V} \sum_{r=1}^V t_r \quad (5.2)$$

o wariancji

$$D(t_{(v)}) = \frac{1}{V} \sum_{r=1}^V (t_r - \bar{t})^2 = s_t^2 \quad (5.3)$$

i kowariancji pomiędzy dwoma zrandomizowanymi obiektami

$$C(t_{(v)}, t_{(v)}) = -s_t^2 / (V - 1), \quad s \neq s. \quad (5.4)$$

Po wykonaniu randomizacji w zbiorze obiektów  $J_V$  wybór reprezentatywnego podzbioru  $J_v$  ( $v \leq V$ ) obiektów, które będą użyte w eksperymencie, można uzyskać biorąc pod uwagę zbiór pierwszych  $v$  obiektów zrandomizowanych. Efekt każdego z nich będzie w modelu przedstawiony za pomocą identycznej zmiennej losowej o stałej wartości oczekiwanej  $\bar{t}$  i o wariancji  $s_t^2$ , której wielkość odzwierciedla zróżnicowanie w działaniu obiektów. Ponadto wszystkie te zmienne są jednakowo skorelowane, ze współczynnikiem korelacji wynoszącym  $-1/(V-1)$  zależnym jedynie od liczebności zbioru  $J_V$ .

Jak łatwo zauważyć ze wzorów (5.2) i (5.3), wielkości  $\bar{t}$  oraz  $s_t^2$  są związane z całym zbiorem obiektów  $J_V$  i byłyby możliwe do wyznaczenia, gdyby wszystkie efekty  $t_1, t_2, \dots, t_V$  były znane. Ponieważ tak nie jest, wielkości  $\bar{t}$  oraz  $s_t^2$  pełnią rolę nieznanych parametrów.

Opierając się na przedstawionym procesie randomizacji obiektów na zbiorze skończonym  $J_V$  nie trudno skonstruować zasadę reprezentowania w doświadczeniu nieskończonego zbioru obiektów  $J_\infty$ . Wybór skończonego podzbioru  $J_v$  musi nastąpić zgodnie z zasadą losowości i w rezultacie efekty obiektów będą reprezentowane w modelu za pomocą niezależnych i identycznych zmiennych losowych  $t_v$  o parametrach  $E(t_v) = \tau$  oraz  $D(t_v) = \delta^2$ , gdzie  $\tau$  będzie założonym a priori efektem oczekiwanym, a  $\delta^2$  będzie założoną wariancją losowego efektu.

W dalszym ciągu wygodnie będzie używać następujących oznaczeń:

$$m_t = \begin{cases} \tau, & J_v \subset J_\infty \\ \bar{t}, & J_v \subset J_V \end{cases}, \quad (5.5)$$

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \delta^2, & J_v \subset J_\infty \\ Vs_t^2 / (V-1), & J_v \subset J_V \end{cases}. \quad (5.6)$$

Pierwsze z nich określa nieznaną wartość oczekiwaną losowo reprezentowanych w doświadczeniu obiektów, natomiast drugie określa wielkość ich wariancji. W rezultacie zbiór obiektów  $J_v$  wybranych za pośrednictwem randomizacji ze skończonego podzbioru obiektów  $J_V$  można opisać modelem

$$\{t, m_t \mathbf{1}_v, \sigma_t^2 (\mathbf{I}_v - \frac{1}{V} \mathbf{J}_v)\}, \quad J_v \subset J_V, \quad (5.7)$$

gdzie  $t = (t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(v)})'$  jest wektorem efektów losowych obiektów zrandomizowanych, a parametry  $m_t$  i  $\sigma_t^2$  określone są odpowiednio w (5.5) i (5.6).

W przypadku obiektów wylosowanych z nieskończonego zbioru obiektów  $\mathcal{Y}_\infty$  odpowiedni model przyjmie postać

$$\{t, m_t \mathbf{1}_v, \sigma_t^2 \mathbf{I}_v\}, \quad \mathcal{Y}_v \subset \mathcal{Y}_\infty, \quad (5.8)$$

gdzie tym razem  $t = (t_1, t_2, \dots, t_v)'$  jest wektorem efektów dotyczących obiektów stanowiących próbę prostą z  $\mathcal{Y}_\infty$ .

## 6. MODELE LOSOWE

W odróżnieniu od modeli stałych, modelami losowymi określa się modele, w których obserwowane zmienne losowe mają wspólną wartość oczekiwaną uzależnioną od pojedynczego parametru (porównaj Scheffé, 1956, s.252). Z sytuacją taką mamy do czynienia, gdy zbiór  $\mathcal{Y}_v$  obiektów uczestniczących w doświadczeniu stanowi próbę zrandomizowaną z ustalonego skończonego zbioru  $\mathcal{Y}_V$  ( $v \leq V$ ), lub wtedy, gdy stanowi on próbę prostą z nieskończonego zbioru obiektów  $\mathcal{Y}_\infty$ .

Modelowanie potencjalnych obserwacji w wypadku losowej reprezentacji obiektów przebiega analogicznie jak w opisanym w paragrafie 4 przypadku obiektów z efektami stałymi. Jedyna zmiana polega na zinterpretowaniu w równości (4.1) efektów stałych, bądź jako efektów losowych obiektów zrandomizowanych  $t_{(s)}$ , bądź jako efektów losowych  $t_s$  obiektów wylosowanych z nieskończonego zbioru obiektów  $\mathcal{Y}_\infty$ . Wobec zakładanej niezależności losowych efektów obiektowych od cechy badanej i błędu technicznego, wyprowadzenie odpowiednich modeli potencjalnych obserwacji sprowadza się do dokonania modyfikacji modeli (4.2) i (4.3) przez uwzględnienie w nich własności wektora losowego  $t$ . Korzystając z (5.7), (5.8) oraz równości  $\Delta' \mathbf{1}_v = \mathbf{1}_n$ , gdzie macierz  $\Delta'$  określona jest w (4.6), otrzymamy w rezultacie następujące cztery modele losowe:

$$\{y, m \mathbf{1}_n, \sigma_t^2 \Delta' \Delta + \sigma^2 \mathbf{I}_n\}, \quad \mathcal{Y}_v \subset \mathcal{Y}_\infty, \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_\infty, \quad (6.1)$$

$$\{y, m \mathbf{1}_n, \sigma_t^2 \Delta' (\mathbf{I}_v - \frac{1}{V} \mathbf{J}_v) \Delta + \sigma^2 \mathbf{I}_n\}, \quad \mathcal{Y}_v \subset \mathcal{Y}_V, \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_\infty, \quad (6.2)$$

$$\{y, m \mathbf{1}_n, \sigma_t^2 \Delta' \Delta + \sigma_u^2 (\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n) + \sigma_o^2 \mathbf{I}_n\}, \quad \mathcal{Y}_v \subset \mathcal{Y}_\infty, \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_N, \quad (6.3)$$

$$\{y, m \mathbf{1}_n, \sigma_t^2 \Delta' (\mathbf{I}_v - \frac{1}{V} \mathbf{J}_v) \Delta + \sigma_u^2 (\mathbf{I}_n - \frac{1}{N} \mathbf{J}_n) + \sigma_o^2 \mathbf{I}_n\}, \quad \mathcal{Y}_v \subset \mathcal{Y}_V, \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_N, \quad (6.4)$$

gdzie  $y$  jest wektorem obserwowanych w doświadczeniu zmiennych losowych,  $m = m_t + m_u$  jest jedynym parametrem stałym, a  $\sigma_t^2$ ,  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_o^2$  oraz  $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_o^2$  są nieznanymi komponentami wariancji.

Każdy z przedstawionych tu modeli losowych dotyczy innego rodzaju populacji podstawowej jednostek eksperymentalnych oraz innego zbioru obiektów. Fakty te mają istotne znaczenie przy określaniu zakresu ważności wyprowadzanych wniosków końcowych. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że

wnioski takie mogą być sformułowane jedynie za pośrednictwem parametrów modelu i w wypadkach tu rozważanych mogą dotyczyć bądź średniej ogólnej  $m$ , bądź relacji pomiędzy odpowiednimi komponentami wariancji.

W odniesieniu do modeli (6.2) i (6.4) należy jeszcze zaznaczyć, że mogą być one również użyte, jeżeli  $v = V$ . Wydaje się jednak, że prowadzenie randomizacji obiektów wtedy, gdy wszystkie obiekty mogą być indywidualnie uwzględnione w eksperymencie nie jest celowe, gdyż działanie to zuboża szczegółowość wniosków końcowych. Z drugiej strony warto podkreślić, że proces randomizacji obiektów nie stoi w sprzeczności z możliwością przeprowadzenia analizy eksperymentu zgodnie z modelem stałym (4.2), lub odpowiednio z modelem mieszanym (4.3), jednakże tylko w odniesieniu do tego podzbioru obiektów  $J_v$ , który w eksperymencie został faktycznie użyty (porównaj Scheffé, 1956, s.254-5).

Dla zilustrowania trudności pojawiających się w związku z analizą modeli o rozbudowanej strukturze macierzy dyspersji przedstawimy twierdzenie dotyczące estymacji parametru  $m$ .

**Twierdzenie 2.** W modelach (6.1)-(6.4) istnieje najlepszy liniowy nieobciążony estymator parametru  $m$  wtedy i tylko wtedy, gdy każdy obiekt replikowany jest tę samą liczbę razy, to znaczy  $n/v$  krotnie. Jeśli warunek ten jest spełniony, to estymatorem tym jest średnia arytmetyczna wszystkich obserwacji.

**Dowód.** Na mocy lematu B zastosowanego do modelu (6.1) można stwierdzić istnienie poszukiwanego estymatora wtedy i tylko wtedy, gdy

$$R(\Delta' \Delta_1)_n) \subset R(1_n) . \quad (6.5)$$

Warunek ten jest równoważny równości

$$\frac{1}{n} J_n \Delta' \Delta_1_n = \Delta' \Delta_1_n , \quad (6.6)$$

ponieważ macierz  $\frac{1}{n} J_n$  jest operatorem rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń  $R(1_n)$ . Wobec nieujemnej określoności macierzy  $I_n - \frac{1}{n} J_n$ , warunek (6.6) jest równoważny równości

$$\Delta(I_n - \frac{1}{n} J_n) \Delta' \Delta_1_n = 0 . \quad (6.7)$$

Lecz  $\Delta \Delta' = \text{diag}_{i=1}^v(n_i)$ ,  $\Delta_1_n = (n_1, n_2, \dots, n_v)'$ , więc równość (6.7) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$n_i^2 = (n_i/n) \sum_{i=1}^v n_i^2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, v, \quad (6.8)$$

lub równoważnie, gdy

$$n_i = n/v \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, v.$$

Dla modelu (6.2) warunek z lematu B przyjmuje postać

$$R\{\Delta'(I_n - \frac{1}{V} J_v) \Delta_1_n\} \subset R(1_n) . \quad (6.9)$$

Ponieważ jednak  $J_v = 1_v 1_v'$  oraz  $\Delta' 1_v = 1_n$ , więc relacja (6.9) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (6.5), co, jak pokazano wyżej, jest równoważne równości (6.8).

W odniesieniu do modeli (6.3) i (6.4) ponad ustalone już fakty pozostaje sprawdzić warunek

$$R\{(I_n - \frac{1}{N} J_n) 1_n\} \subset R(1_n),$$

który, jak łatwo stwierdzić, spełniony jest zawsze.

W konsekwencji we wszystkich czterech modelach istnienie najlepszego liniowego nieobciążonego estymatora parametru  $m$  jest warunkowane równością  $n_1 = n_2 = \dots = n_v = n/v$ . W świetle lematu B pozostała część twierdzenia jest bezpośrednio widoczna.  $\square$

Zestawiając ustalone tu rezultaty z wynikami paragrafu wcześniejszego można zauważyć, że w modelach opisujących eksperymenty, w których nie prowadzono randomizacji obiektów, estymatorem najlepszym dla wartości oczekiwanej wektora losowego  $y$  jest estymator najmniejszych kwadratów. Jeśli natomiast obiekty biorące udział w eksperymencie podlegały procesowi randomizacji, to istnienie estymatora najlepszego nie jest pewne i zależy od spełnienia warunku równości replikacji.

#### SUPLEMENT

Przedstawimy tutaj niektóre rezultaty ogólnej teorii modelu liniowego. Model taki ma postać

$$\{y, X\beta, \Upsilon\},$$

gdzie  $y$  jest wektorową zmienną losową, której wartość oczekiwana  $E(y)$  jest postaci  $X\beta$ , a macierz dyspersji  $D(y)$  należy do ustalonego zbioru  $\Upsilon$ . macierzy określonych nieujemnie,

$$\Upsilon = \{V: V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_k V_k \geq O, \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

W powyższym przedstawieniu macierz  $X$  oraz określone nieujemnie macierze  $V_1, V_2, \dots, V_k$  są ustalone, natomiast wektor  $\beta$  i skalary  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  stanowią nieznanne parametry.

Najlepszym liniowym nieobciążonym estymatorem układu funkcji parametrycznych  $X\beta$  nazywamy statystykę  $Ay$  taką, że

$$E(Ay) = X\beta \quad (*)$$

oraz dla każdego innego estymatora, powiedzmy  $By$ , spełniającego warunek nieobciążoności (\*), zachodzi relacja

$$D(By) - D(Ay) \geq O,$$

gdzie znak nierówności oznacza, że różnica  $D(By) - D(Ay)$  jest macierzą określoną nieujemnie.

Estymatorem uzyskanym metodą najmniejszych kwadratów lub, mówiąc krócej, estymatorem najmniejszych kwadratów nazywamy statystykę

$$P_y = X(X'X)^{-1}X'y,$$

gdzie  $(X'X)^{-1}$  jest dowolną uogólnioną odwrotnością macierzy  $X'X$ , to znaczy macierzą spełniającą równanie  $X'X(X'X)^{-1}X'X = X'X$ . Macierz  $P$  jest operatorem rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń rozpiętą na kolumnach macierzy  $X$ . Podprzestrzeń tę oznaczamy symbolem  $R(X)$ . Wiadomo, że statystyka  $P_y$  jest estymatorem nieobciążonym dla  $X\beta$  w dowolnym modelu liniowym  $\{y, X\beta, v\}$  oraz że jest najlepszym liniowym estymatorem nieobciążonym  $X\beta$  w modelu  $\{y, X\beta, \sigma^2 I\}$ .

Poniższe lematy precyzują warunki, przy których estymator  $P_y$  staje się również estymatorem najlepszym dla  $X\beta$  w modelu ogólnym.

**Lemat A.** Jeżeli dla modelu  $\{y, X\beta, v\}$  spełniony jest układ warunków

$$R(v_i X) \subset R(X) \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (**)$$

to w modelu tym najlepszy nieobciążony estymator wektora  $X\beta$  istnieje i jest identyczny z estymatorem najmniejszych kwadratów.

**Lemat B.** Jeżeli dla modelu  $\{y, X\beta, v\}$  spełniona jest relacja  $I \in \mathcal{V}$ , to układ warunków **(\*\*)** jest konieczny i dostateczny na to, aby w modelu tym istniał najlepszy liniowy estymator  $X\beta$  i jest on wtedy identyczny z estymatorem najmniejszych kwadratów.

Pierwszy z przytoczonych lematów można odnieść do rezultatu Zyskinda (1967), zgodnie z którym relacja  $R(vX) \subset R(X)$  jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby estymator najmniejszych kwadratów był estymatorem najlepszym wśród estymatorów nieobciążonych wektora  $X\beta$  w modelu  $\{y, X\beta, \sigma^2 v\}$ . Fakt ten w połączeniu z podaną przez Kalę (1981) formalną definicją najlepszego nieobciążonego estymatora liniowego  $X\beta$  w modelu  $\{y, X\beta, v\}$  uzasadnia stwierdzenie zawarte w lemacie A. Lemat B jest natomiast bezpośrednim wnioskiem z twierdzeń 4.1 i 5.1 z pracy Kali (1981), które, wobec założenia  $I \in \mathcal{V}$ , można również wyrazić za pomocą warunku **(\*\*)**.

#### LITERATURA

- Bailey R.A. (1981). A unified approach to design of experiments. *J. R. Statist. Soc. A* **144**, 214-223.
- Kala R. (1981). Projectors and linear estimation in general linear models. *Commun. Statist.-Theor. Meth. A* **10**, 849-873.
- Kala R. (1989). Elementy teorii randomizacji. I. Próba zrandomizowana. *Listy Biometryczne* **26**, 41-55.
- Kempthorne O. (1952). *The Design and Analysis of Experiments*. J. Wiley, New York.

- Nelder J.A. (1965a). The analysis of randomized experiments with orthogonal block structure. I. Block structure and the null analysis of variance. *Proc. Roy. Soc. A* **283**, 147-162.
- Nelder J.A. (1965b). The analysis of randomized experiments with orthogonal block structure. II. Treatment structure and the general analysis of variance. *Proc. Roy. Soc. A* **283**, 163-178.
- Neyman J., Iwazskiewicz K. i Kołodziejczyk S. (1935). Statistical problems in agricultural experimentation. *J. R. Statist. Soc. Suppl.*, **2**, 107-154.
- Pearce S.C. (1983). *The Agricultural Field Experiment. A Statistical Examination of Theory and Practice*. J. Wiley, Chichester.
- Scheffe H. (1959). *The Analysis of Variance*. J. Wiley, New York.
- Scheffe H. (1956). Alternative models for the analysis of variance. *Ann. Math. Statist.* **27**, 251-271.
- Searle S.R. (1971). *Linear Models*. J. Wiley, New York.
- White R. F. (1975). Randomization and the analysis of variance. *Biometrics* **31**, 555-571.
- Zyskind G. (1967). On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models. *Ann. Math. Statist.* **38**, 1092-1109.
- Praca wpłynęła 10 marca 1989;  
w wersji ostatecznej 13 września 1989

## ELEMENTS OF THE RANDOMIZATION THEORY

### II. MODELING OF SIMPLE EXPERIMENTS

#### Summary

In this paper, being the second in a series of papers devoted to the randomization theory, the construction of the models for simple experiments is described. The common assumption of unit-treatment additivity is discussed in the light of a weaker assumption of preserving a homogeneity (symmetry) of the units.

The models obtained are examined with regard to the existence of the best linear unbiased estimator of fixed parameters. To this aim the general theory of estimation in linear models is utilized.

**Key words:** additivity, homogeneity, null experiments, fixed models, random models, mixed models